**PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ BẬC HAI**

**A. Lý thuyết**

1. Phương trình trùng phương

- Phương trình trùng phương là phương trình có dạng: ****

**Cách giải:** Đặt ẩn phụ  để đưa phương trình về phương trình bậc hai ****

2. Phương trình chứa ẩn ở mẫu thức

Để giải phương trình chứa ẩn ở mẫu thức ta làm theo các bước sau:

*Bước 1:* Tìm điều kiện xác định của ẩn của phương trình

*Bước 2:* Quy đồng mẫu thức hai vế rồi khử mẫu

*Bước 3:* Giải phương trình vừa nhận được ở bước 2

*Bước 4:* So sánh các nghiệm tìm được ở bước 3 với điều kiện xác định và kết luận

3. Phương trình đưa về dạng tích

Để giải phương trình đưa về dạng tích, ta có thể thực hiện theo các bước sau

*Bước 1:* Phân tích vế trái thành nhân tử, vế phải bằng 0

*Bước 2:* Xét từng nhận tử bằng 0 để tìm nghiệm

**B. Bài tập và các dạng toán**

**I. Phương trình không chứa tham số**

**Dạng 1: Giải phương trình trùng phương**

**Cách giải:** Xét phương trình trùng phương ****

*Bước 1:* Đặt  ta được phương trình bậc hai: ****

*Bước 2:* Giải phương trình bậc hai ẩn t từ đó tìm được các nghiệm của phương trình trugnf phương đã cho

**Bài 1:** Giải các phương trình sau:

a)  b) 

c) 

**Lời giải**

a) Đặt  ta có: 

b) Đặt  ta có: , từ đó 

c) **Cách 1:** Đặt  phương trình đã cho trở thành 



Vậy phương trình có tập nghiệm 

**Cách 2:** Giải trực tiếp

Ta có 



Vậy phương trình có tập nghiệm 

**Bài 2:** Giải các phương trình sau:

a)  b) 

**Lời giải**

a) Đặt  ta có: 

b) Đặt  ta có: 

**Bài 3:** Giải các phương trình sau:

a. **** b. **** c. ****

d. **** e. **** f. ****

g. ****

**Lời giải**

a. Đặt ****

b. Đặt ****

****

c. Điều kiện ****

**Dạng 2: Phương trình chứa ẩn ở mẫu thức**

**Cách giải:** Ta thực hiện thep các bước sau

*Bước 1:* Tìm điều kiện xác định của ẩn của phương trình

*Bước 2:* Quy đồng mẫu thức hai vế rồi khử mẫu

*Bước 3:* Giải phương trình vừa nhận được ở bước 2

*Bước 4:* So sánh các nghiệm tìm được ở bước 3 với điều kiện xác định và kết luận

**Bài 1:** Giải các phương trình sau:

a) **** b) ****

c) ****

**Lời giải**

a) Điều kiện: ****

****

Ta có: 

b) Tìm được:  hoặc 

c) Tìm được 

**Bài 2:** Giải các phương trình sau:

a) **** b) ****

c) ****

**Lời giải**

a) Tìm được:  hoặc 

b) Tìm được 

c) Tìm được:  hoặc 

**Bài 3:** Giải các phương trình sau:

a. **** b. ****

c. ****

d.A. ****

e. **** f. ****

g. ****

**Lời giải**

a. Điều kiện xác định: ****

****

****

b. ****

c. Ta có **** ( không nên giải điều kiện ) ****

d. Ta có: ****

Vậy điều kiện xác định: ****

**Dạng 3: Phương trình đưa về dạng tích**

**Cách giải:** Để giải phương trình đưa về dạng tích, ta có thể làm theo các bước sau:

*Bước 1:* Chuyển vế và phân tích vế trái thành nhân tử, vế phải bằng 0

*Bước 2:* Xét từng nhân tử bằng 0 và tìm nghiệm.

**Bài 1:** Giải phương trình sau: ****

**Lời giải**

**Nhận xét:** Phương trình này nhẩm được một nghiệm  nên ta sẽ tách được nhân tử 

Cách 1: Ta có ****

****

**Cách 2:** Ta có ****

****

**Cách 3:** Đặt phép chia đa thức  cho đa thức  ta được thương là  nên 

**Bài 2:** Giải các phương trình sau:

a) **** b) ****

**Lời giải**

a) ****

b) ****

**Bài 3:** Giải các phương trình sau:

a) **** b) ****

**Lời giải**

a) ****

b) ****

**Bài 4:** Giải các phương trình sau:

a. **** b. ****

c. **** d. ****

e.A. **** f. ****

**Lời giải**

a. ****

b. ****

c. ****

d. ****

e.A. ****

f. ****

****

**Dạng 4: Giải bằng phương pháp đặt ẩn phụ**

**Cách giải:** Để giải phương trình đưa về dạng tích, ta có thể làm theo các bước sau:

*Bước 1:* Đặt điều kiện xác định (nếu có)

*Bước 2:* Đặt ẩn phụ, đặt điều kiện của ẩn phụ (nếu có) và giải phương trình theo ẩn mới

*Bước 3:* Tìm nghiệm ban đầu và so sánh với điều kiện xác định và kết luận.

**Bài 1:** Giải các phương trình sau: ****

**Lời giải**

Ta có: ****

Đặt  ta được ****

- Với ****

- Với ****

Vậy phương trình có tập nghiệm là **.**

**Bài 2:** Giải các phương trình sau:

a. **** b. ****

c. ****

**Lời giải**

a) . Đặt , ta được: 

Với 

b) Ta đi xét 2 trường hợp

*Trường hợp 1:* Với  thay và phương trình không thấy thỏa mãn

*Trường hợp 2:* Với  chia cả 2 vế cho  ta được: ****

Đặt 

c) Ta đi xét 2 trường hợp

*Trường hợp 1:* Với  thay và phương trình không thấy thỏa mãn

*Trường hợp 2:* Với  chia cả 2 vế cho  sau đó đặt 

**Bài 3:** Giải các phương trình sau:

a. **** b. ****

c. ****

**Lời giải**

a) Đặt , từ đó tìm được  hoặc 

b) Đặt  từ đó tìm được  hoặc 

c) Tìm được:  hoặc 

**Bài 4:** Giải các phương trình sau:

a. **** b. ****

c. **** d. ****

e.**** f. ****

**Lời giải**

a. Đặt ****

b. ****

c. Đặt ****

d. ****

Đặt ****

e. Điều kiện ****

****

****

f. ****

**Dạng 5: Phương trình chứa căn thức**

**Cách giải:** Làm mất dấu căn bằng cách đặt ẩn phụ hoặc lũy thừa hai vế

Chú ý: ****

**Bài 1:** Giải các phương trình sau:

a. **** b. ****

**Lời giải**

a) Điều kiện  ta có: ****

b) .

**Bài 2:** Giải các phương trình sau

a. **** b. ****

c. **** d. ****

**Lời giải**

a. Điều kiện ****

***Cách 1:*** Đặt ****

Với ****

***Cách 2:*** Bình phương hai vế ta được: ****

b. Điều kiện: ****

****

****

c. Điều kiện: ****

****

**Dạng 6: Một số dạng khác**

**Cách giải:** Ngoài các phương pháp trên, ta còn dùng các phương pháp hằng đẳng thức, thêm bớt hạng tử, hoặc đánh giá hai vế... để giải phương trình

**Bài 1:** Giải các phương trình sau

a. **** b. ****

c. ****

**Lời giải**

a) ****

b) ****

c) ****

**Bài 2:** Giải các phương trình sau bằng phương pháp đánh giá

a. **** b. ****

**Lời giải**

a) Điều kiện: ****

Dấu ‘=’ xảy ra ****

b) ****

**Bài 3:** Giải các phương trình sau:

a. **** b. ****

**Lời giải**

a) Đặt ****

b) ****

Đặt ****

**II. Phương trình chứa tham số**

**Dạng 1: Phương trình bậc ba đưa được về dạng tích **

**Cách giải:**

***Bước 1:*** Tách riêng phần chứa m được dạng  rồi tách  từ  ta đưa được phương trình đã cho về dạng: ****

***Bước 2:*** Ghi nhớ một số điều kiện sau

- Phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình  có hai nghiệm phân biệt 

- Phương trình đã cho có đúng hai nghiệm  phương trình  có đúng một nghiệm thỏa mãn 

- Phương trình đã cho có đúng một nghiệm  phương trình  hoặc vô ngiệm, hoặc có nghiệm kép .

**Bài 1:** Cho phương trình 

Tìm m để phương trình đã cho:

a) Có ba nghiệm phân biệt

b) Có đúng hai nghiệm khác nhau

c) Có đúng một nghiệm

d) Có ba nghiệm  thỏa mãn 

**Lời giải**

Ta có: 



a) Phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt  có hai nghiệm phân biệt 



Vậy  là các giá trị cần tìm.

b) (1) có đúng hai nghiệm khác nhau  có đúng một nghiệm 

- Trường hợp 1: (2) có nghiệm kép 



- Trường hợp 2: (2) có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm 

 (lọai)

Vậy  là giá trị cần tìm.

c) (1) có đúng hai nghiệm  không có nghiệm nào thỏa mãn 

- Trường hợp 1: (2) có nghiệm kép 

 (lọai)

- Trường hợp 2: (2) vô nghiệm 

Vậy  là giá trị cần tìm

d) Theo câu a) với  thì (1) có ba nghiệm phân biệt . Do  vai trò như nhau và trong ba nghiệm của (1) có một nghiệm bằng -1 nên ta giả sử  thì  là hai nghiệm của (2).

Theo định lý Viet, ta có 

Thay  vào  ta được:  (tm)

Vậy  là giá trị cần tìm.

**Dạng 2: Phương trình trùng phương**

**Bài toán:** Tìm m để phương trình  (1)

a) Có bốn nghiệm phân biệt

b) Có đúng ba nghiệm khác nhau

c) Có đúng hai nghiệm khác nhau

d) Có đúng một nghiệm

e) Vô nghiệm

**Cách giải:**

Bước 1: Đặt  phương trình đã cho trở thành ****

Bước 2: Nhận xét

- Với  thì không có x

- Với  thì có một giá trị ****

- Với  thì có hai giá trị của x là ****

Do đó ta có các kết quả sau

a) (1) có bốn nghiệm phân biệt khi (2) có hai nghiệm phân biệt ****

b) (1) có đúng ba nghiệm khác nhau khi (2) có hia nghiệm phân biệt ****

c) (1) có đúng hai nghiệm khác nhau xảy ra hai trường hợp:

- Trường hợp 1: (2) có nghiệm kép ****

- Trường hợp 2: (2) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn ****

d) (1) có đúng một nghiệm xảy ra 2 trường hợp

- Trường hợp 1: (2) có nghiệm kép ****

- Trường hợp 2: (2) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn ****

e) (1) vô nghiệm xảy ra ba trường hợp

- Trường hợp 1: (2) vô nghiệm ****

- Trường hợp 2: (2) có nghiệm kép

- Trường hợp 3: (2) có hai nghiệm phân biệt ****

**Bài 1:** Cho phương trình: ****. Tìm m để:

a. Phương trình có bốn nghiệm

b. Phương trình vô nghiệm

c. Phương trình có ba nghiệm phân biệt

**Lời giải**

Đặt****

a. (1) có 4 nghiệm phân biệt **** có hai nghiệm dương phân biệt ****

b. (1) vô nghiệm khi (2) vô nghiệm hoặc (2) có hai nghiệm âm

+) (2) vô nghiệm ****

+) (2) có hai nghiệm âm ****

Vậy (1) vô nghiệm khi ****

c. (1) có ba nghiệm phân biệt **** [(1) có nghiệm x = 0]

****

**Bài 2:** Cho phương trình: ****. Tìm m để:

a. Giải phương trình với m = 5

b. Tìm m để phương trình có bốn nghiệm phân biệt

**Lời giải**

a. Với ****

b. Đặt ****

Phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt ****

**Bài 3:** Cho phương trình: ****. Tìm m để phương trình đã cho

a) Có bốn nghiệm phân biệt

b) Có đúng ba nghiệm khác nhau

c) Có đúng hai nghiệm khác nhau

d) Có bốn nghiệm phân biệt thỏa mãn ****

**Lời giải**

***Cách 1:***

a) Đặt  phương trình (1) trở thành 

Nhận xét:

- Với **** thì không có x

- Với **** thì có một giá trị 

- Với **** thì có hai giá trị của x là 

a) (1) có bốn nghiệm phân biệt khi (2) có hai nghiệm phân biệt 

Ta có 

- (2) có hai nghiệm phân biệt  khi 

Theo định lý Viet, ta có 

- 

Vậy  là giá trị cần tìm.

b) (1) có đúng ba nghiệm khác nhau khi (2) có hai nghiệm phân biệt 

- Theo trên thì (2) có hai nghiệm phân biệt  khi 

- 

Vậy  là giá trị cần tìm.

c) (1) có đúng hai nghiệm khác nhau xả ra hia trường hợp

- Trường hợp 1: (2) có nghiệm kép 

- Trường hợp 2: (2) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn 

Vậy  là các giá trị cần tìm.

d) Theo câu a) thì phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt khi 

Do  nên bốn nghiệm phân biệt của (1) là: 

Suy ra ****



Do ****

Vậy  là giá trị cần tìm.

**Cách 2:** Đưa về tích

Phương trình (1) 



a) Vì phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt là  nên để phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt thì phương trình  phải có hai nghiệm phân biệt khác 



Vậy  là giá trị cần tìm

b) Vì phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt là  nên phương trình đã cho có ba nghiệm khác nhau thì phương trình  phải có đúng một nghiệm 

Vậy  là giá trị cần tìm

c) Vì phương trình đã cho có hai nghiệm khác nhau là  nên để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm khác nhau thì phương trình  hoặc vô nghiệm hoặc chỉ có nghiệm là 

Vậy  là giá trị cần tìm.

d) Theo câu a) thì phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt khi  khi đó bốn nghiệm của (1) là  do đó ****

****



Vậy  là giá trị cần tìm.

**BÀI TẬP VỀ NHÀ**

**Bài 1:** Giải các phương trình sau

a. **** b. ****

**Hướng dẫn giải**

a) ****

b) ****

**Bài 2:** Giải các phương trình sau

a. **** b. ****

**Hướng dẫn giải**

a) ****

b) Phương trình vô nghiệm

**Bài 3:** Giải các phương trình sau

a. **** b. ****

c. **** b. ****

**Hướng dẫn giải**

a) **** b) ****

c) **** d) ****

**Bài 4:** Giải các phương trình sau

a. **** b. ****

**Hướng dẫn giải**

a) **** b) ****